Métodos topológicos en el análisis no lineal
Clase 8 - 30/9 (versión preliminar)

1 El grado cero de la escritura del grado

En la última clase comenzamos a desarrollar una idea intuitiva para definir el grado de una función $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ continua, con $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dominio acotado de manera que se pueda extender fácilmente a $\mathbb{R}^n$. Pero esta construcción quedó apenas en la etapa inicial o, por así decirlo, en el grado cero. Dijimos, eso sí, algunas cosas fundamentales: el grado que estamos planeando depende solo de los valores de f en el borde y tiene la propiedad de aditividad; además, si f no se anula su grado es forzosamente 0. Eso nos sirvió para convencernos de que si f es de clase C^1 que no se anula en $\partial\Omega$ y 0 es valor regular, entonces el $\deg(f, \Omega, 0)$ se descompone como la suma del grado en pequeñas bolitas centradas en los (finitos) ceros de f. Y en cada una de esas bolitas la función se parece a una función lineal, así que el grado debería ser fácil de calcular.

Dicho y hecho: supongamos $x \in f^{-1}(0)$ y, dado $\varepsilon > 0$, tomemos r suficientemente chico tal que

$$f(y) = Df(x)(y - x) + R(y)$$

con $|R(y)| \leq \varepsilon |y - x|$ para $|y - x| \leq r$ (¡Taylor, viejo y peludo!). La pregunta es: ¿qué ε conviene elegir? Y la respuesta es: ya que la matriz $A = Df(x)$ es inversible, alcanza con tomar $\varepsilon < \inf_{|w|=1} |Aw|$. De esta forma

$$|f(y) - A(y - x)| = |R(y)| \leq \varepsilon |y - x| < |A(y - x)|$$

para $|y - x| = r$. Pero entonces (¡Rouché, viejo y peludo!) vale

$$\deg(f, B_r(x), 0) = \deg(\tilde{A}, B_r(x), 0)$$

donde $\tilde{A}(y) = A(y - x)$. Pero es claro que $\deg(\tilde{A}, B_r(x), 0) = \deg(A, B_r(0), 0)$ y, además, resulta que este último grado, por una de esas casualidades, lo calculamos un par de clases atrás: es simplemente el signo del determinante de A. En otras palabras,

$$\deg(f, B_r(x), 0) = sgn(Jf(x)),$$

donde $Jf(x) = \det(Df(x))$ es el determinante jacobiano (¡Jacobi viejo y peludo!). En resumen, hemos probado (digamos) que:

$$\deg(f, \Omega, 0) = \sum_{x \in f^{-1}(0)} sgn(Jf(x)). \qquad (1)$$

Más allá de las pequeñas imprecisiones, podemos estar contentos: llegamos a una expresión válida para una función en $\mathbb{R}^n$. Entonces el mapa de ruta es bastante claro: tomar la expresión anterior como definición del grado cuando f es suave y 0 es valor regular y luego extenderlo para funciones continuas. ¿De qué manera? Igual que como hicimos con el índice de una curva: probar que para f y g buenas y cercanas el grado es el mismo y luego aproximar cualquier función continua por una de las tan mentadas funciones "buenas". Hacia allí dirigiremos nuestras proas, en la próxima sección. Pero antes (¡uy, no!) algunos comentarios.

Observación 1.1 *A ver qué opina, lector, de una $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ analítica tal que $f \neq 0$ en $\partial\Omega$. Si queremos que 0 no sea valor regular, tenemos que pedir que las raíces de f sean simples. Pero una f analítica preserva ángulos y, en particular, la orientación: en consecuencia, la fórmula (1) cuenta* exactamente *la cantidad de ceros de f. ¿Qué me Contursi? Claro que si lo calculamos a la vieja usanza, resulta*

$$I(f \circ \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{f\circ\gamma} \frac{1}{z}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{(f\circ\gamma)'(t)}{f\circ\gamma(t)}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f(\gamma(t))}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz.$$

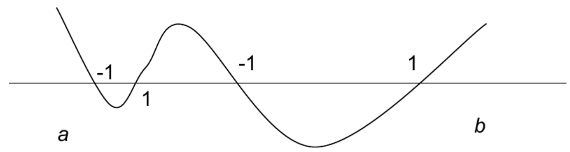
De esta forma nos encontramos con otro viejo conocido: el teorema de los ceros y polos, en este caso sin polos -para ser sinceros-.[1]

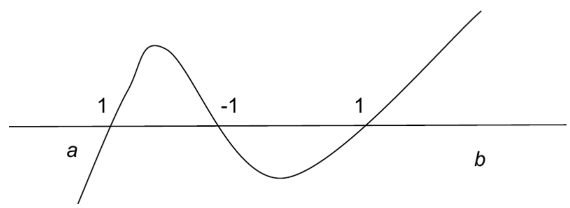
Observación 1.2 *Un caso especialmente sencillo es $n = 1$ donde, por aditividad, basta analizar lo que ocurre cuando Ω es un intervalo abierto (acotado). Cabe aclarar, para evitar suspicacias, que si se tratase de una unión infinita de intervalos abiertos disjuntos, solo una cantidad finita de ellos aportaría para el bulín o -mejor dicho- para el grado. En efecto, recordemos que Ω es acotado; luego, si f tuviera algún cero $x_j \in I_j$ para una familia infinita de intervalos abiertos disjuntos $I_j \subset \Omega$, entonces f tendría que anularse en algún punto de $\partial\Omega$, lo que es absurdo. Ahora, para $\Omega = (a, b)$ la situación es clara, porque el grado de f es el mismo que el de la recta que coincide con f en $\partial\Omega$. Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen el mismo signo, el grado es 0 pues la recta no se anula; en los otros casos es ± 1. Cuando f es suave y 0 es valor regular, esto se verifica claramente sumando signos: En definitiva,*

$$\deg(f, (a, b), 0) = \begin{cases} 1 & si \quad f(a) < 0 < f(b) \\ -1 & si \quad f(a) > 0 > f(b) \\ 0 & si \quad f(a)f(b) > 0. \end{cases}$$

En este contexto, la propiedad de existencia (grado $\neq 0 \Longrightarrow f$ se anula) no es otra cosa que el teorema de Bolzano.

[1]Habiendo algunos chistes más afortunados que otros, el autor no se responsabiliza por los daños que estos últimos pudieren provocar en el ánimo del lector sensible. Aunque (para ser sinceros) también se trata una versión 'sin ceros', en lo que respecta a ceros *múltiples*.





2 Por ser bueno me dejaste en la miseria

Como vimos en la sección previa, más allá de los riesgos que se mencionan en el título, el hecho de que una función sea 'buena' tiene la ventaja de que su grado se define fácilmente a partir de (1). Ya expertos en estas lides, podríamos pensar que entonces estamos cerca de nuestro cometido porque, como alguna vez aprendimos, cualquier función continua se aproxima por funciones suaves. Sin embargo, ahora la bondad no se refiere solamente a ser derivable una y mil veces, sino al hecho de que 0 sea un valor regular. Entonces, si Stone y Weierstrass lo permiten, vamos a invitar también a otro famoso: nos referimos a Sard, quien en un artículo de 1942 probó que arbitrariamente cerca de una función suave f hay otras funciones suaves para las cuales 0 es un valor regular. En realidad, Sard probó mucho más que eso: casi todo punto y del codominio es un valor regular; luego, alcanza con tomar y tan cerca del origen como nos haga falta y definir $\hat{f}(x) = f(x) - y$. Por supuesto, aquí el impreciso término 'casi' debe leerse en el preciso sentido de Lebesgue: dicho de otra forma, el conjunto de valores no regulares (críticos) tiene medida 0.[2] La versión general del lema de Sard puede encontrarse en [2], para nuestros fines alcanza con el siguiente caso particular, que tiene una demostración elemental (ver apéndice):

Teorema 2.1 *(Sard) Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : U \to \mathbb{R}^n$ de clase C^2. Entonces el conjunto $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ de valores críticos de f tiene medida 0.*

Las anteriores consideraciones permiten vislumbrar que va a ser cómodo hacer uso de esa tercera coordenada de la función 'deg' que hasta ahora habíamos

[2]Para el que no haya estudiado teoría de la medida, la interpretación intuitiva es la siguiente: si elegimos al azar un elemento del codominio, la probabilidad de que sea un valor crítico es 0. Antes de poner el grito en el cielo, al lector le conviene observar que si $y \notin \mathrm{Im}(f)$ entonces es tautológicamente un valor regular: los (inexistentes) puntos de su preimagen satisfacen cualquier propiedad que se nos ocurra.

dejado fija: al fin y al cabo, si vamos a hablar del grado de $f(x) - y$ en 0, ¿por qué no pensarlo también como el grado de f en y? Esto motiva la siguiente definición, para $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ suave tal que y es valor regular tal que $y \notin f(\partial\Omega)$:

$$\deg(f, \Omega, y) := \sum_{x \in f^{-1}(y)} sgn(Jf(x)). \tag{2}$$

La estrategia ahora es similar a la que vimos para $n = 2$: una vez definido el grado para el caso regular, vamos a probar que si dos funciones buenas están cerca entre sí, entonces tienen el mismo grado, lo que nos permitirá extender la definición para funciones continuas. Pero esto hay que hacerlo con mucho cuidado y establecer con algo de precisión qué tan cercano significa “cercano”. En efecto, no alcanza con probar que el grado definido en (2) es localmente constante sobre el conjunto de las funciones ‘buenas’, porque la topología de este conjunto puede ser bastante fulera.[3] Pero recordemos lo que hicimos para una curva continua γ: primero miramos su distancia d al origen y a partir de ese valor fijamos $\varepsilon = \frac{d}{6}$, con el cual todo funcionó muy bien. Es claro que el valor de ε no importaba mucho ya que, a posteriori, el índice iba a resultar constante en cada componente conexa del conjunto de curvas que no pasan por el origen. En el caso general pasa exactamente lo mismo, por eso tiene sentido el siguiente lema:

Lema 2.2 *Sea $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ tal que y es un valor regular con $y \notin f(\partial\Omega)$. Fijamos $\varepsilon := \frac{1}{7} dist(y, f(\partial\Omega))$. Dada $g \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ tal que y es valor regular de g y además $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$, se cumple:* $\deg(g, \Omega, y) = \deg(f, \Omega, y)$.

La demostración es algo técnica y por eso la dejamos para el apéndice. Cabe mencionar que es posible un enfoque similar al que vimos para el caso $n = 2$, definiendo primero el grado como ‘número de vueltas’ del campo $f|_{\partial\Omega}$ mediante la llamada *integral de Kronecker*, que emplea algunas herramientas de geometría diferencial. Una presentación elegante de esta forma de definir el grado aparece en [1].

Dejando de lado los “detallecitos” (cuando el lector vea el apéndice comprenderá el porqué de las comillas), ya tenemos todo lo que necesitamos para definir el grado para una función continua cualquiera tal que $y \notin f(\partial\Omega)$ en la forma

$$\deg(f, \Omega, y) := \deg(\hat{f}, \Omega, y)$$

donde $\hat{f}$ es una aproximación suave de f para la cual y es valor regular. La existencia de $\hat{f}$ está garantizada por el trío más mentado (Stone-Weierstrass-Sard) y su cercanía con f asegura que $y \notin \hat{f}(\partial\Omega)$. El valor $\frac{1}{7}$ del lema previo hace que suene ligeramente grotesco elegir la aproximación de manera precisa,

[3]Pequeño comentario “filosófico”: cabe hacer la aclaración de que una familia de entornos para cada función “buena” no necesariamente cubre el conjunto de todas las funciones “malas”, es decir, solamente continuas (pidiendo siempre que no valgan y en el borde, su maldad no llega a tanto como para ser inadmisibles). A modo de analogía, escribamos $\mathbb{Q} = \{q_n\}$, entonces la familia de entornos de la pinta $(q_n - \frac{1}{2^n}, q_n + \frac{1}{2^n})$ no cubre $\mathbb{R}$.

pero vamos a hacerlo para despejar toda sospecha. En primer lugar, observemos que si $d = dist(y, f(\partial\Omega))$ y $\|f - \hat{f}\|_\infty < \eta$ entonces $dist(y, \hat{f}(\partial\Omega)) \geq d - \eta$. Por otra parte, si tomamos otra posible aproximación $\hat{g}$ tal que $\|f - \hat{g}\|_\infty < \eta$, entonces $\|\hat{f} - \hat{f}\|_\infty < 2\eta$. Para aplicar el lema previo, necesitamos entonces que $2\eta \leq \frac{d-\eta}{7}$, lo que proporciona el bonito valor $\eta = \frac{d}{15}$.

Por supuesto, el procedimiento se puede resumir sin tanto d y η en una ráfaga de aproximaciones: primero, para $f \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que $y \notin f(\partial\Omega)$ definimos el grado calculando el grado para el conjunto $V_R(f)$ de valores regulares:

$$\deg(f, \Omega, y) := \lim_{z \in V_R(f), z \to 0} \deg(f, \Omega, z).$$

Una vez que tenemos definido el grado para funciones C^2, entonces se extiende para cualquier f continua:

$$\deg(f, \Omega, y) := \lim_{\hat{f} \in C^2(\overline{\Omega}), \|\hat{f} - f\|_\infty \to 0} \deg(\hat{f}, \Omega, y).$$

Una vez que logramos extender la definición para funciones continuas, nada nos impide, de buen grado, deducir algunas propiedades elementales. A modo de precalentamiento, empecemos con una bien fácil, cuando f es nada menos que la función identidad. En ese caso, el grado estará definido cuando $y \notin \partial\Omega$ y vale

$$\deg(Id, \Omega, y) = \begin{cases} 1 & y \in \Omega \\ 0 & y \notin \Omega. \end{cases} \tag{3}$$

Esto se debe al obvio hecho de que Id es suave y todos sus valores son regulares. En el caso $n = 2$, la propiedad equivale a decir que una curva simple da una vuelta en torno a sus puntos interiores y ninguna alrededor de sus puntos exteriores. Otra propiedad pura y cristalina es la de traslacion

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f - y, \Omega, 0), \tag{4}$$

que vale para el caso regular y atraviesa con éxito la anterior ráfaga de límites.

Algo similar ocurre con la aditividad, que tan importante resultó a la hora de definir el grado y ahora queda como un simple ejercicio. Se la puede formular de esta manera: si $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ son abiertos disjuntos tales que $f \neq y$ en $\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2)$, entonces

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \Omega_1, y) + \deg(f, \Omega_2, y). \tag{5}$$

Para hacer justicia hay que decir que la propiedad también se conoce como aditividad-escisión, nombre bastante razonable si se piensa que, además de sumar los grados de los dos subconjuntos, hemos despachado sin el menor disimulo un trozo del conjunto, bajo la cobarde excusa de que allí la función no toma el valor y. La propiedad de escisión también suele formularse de la siguiente manera: si $\Omega_1 \subset \Omega$ es abierto y $f \neq y$ en $\overline{\Omega} \backslash \Omega_1$, entonces

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \Omega_1, y).$$

La explicación es sencilla: en primer lugar, observemos que el grado de cualquier f es 0 cuando la restringimos al conjunto vacío. Esto no es más que una seguidilla de tautologías, ya que $f|_\emptyset$ es la función vacía, para la cual y es valor regular y el conjunto de preimágenes es -obviamente- vacío. Pero también se deduce de (5), tomando $\Omega = \Omega_1 = \Omega_2 = \emptyset$. En fin, el hecho es que si ahora tenemos $\Omega_1 \subset \Omega$ tales que $f \neq y$ en $\overline{\Omega}\backslash\Omega_1$, entonces podemos tomar $\Omega_2 = \emptyset$ y deducir la propiedad de escisión.

Y ahora llega la que todos estábamos esperando: la propiedad de solución. si $y \notin f(\partial\Omega)$ y el grado es distinto de 0, entonces y tiene al menos una preimagen. Más precisamente:

$$\deg(f, \Omega, y) \neq 0 \Longrightarrow \exists\, x \in \Omega / f(x) = y. \tag{6}$$

Para los que tienen simpatía por los sistemas axiomáticos (específicamente, por la noción de independencia), cabe observar que esta propiedad también se deduce directamente de la anterior. En efecto, si $f \neq y$ en $\overline{\Omega}$, de un zarpazo podemos escindir todo el conjunto de modo que

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \Omega\backslash\Omega, y) = 0.$$

Si, en cambio, uno prefiere un argumento directo, puede observar que el caso regular es trivial porque (otra vez) si la suma (2) no da cero es porque hay al menos un término. Si ahora f es solamente continua, la aproximamos por f_j suaves tal que y es valor regular, que tienen al menos una preimagen x_j. Tomando una subsucesión, podemos suponer que x_j converge a cierto x, que resulta, para nuestra alegría, ser una preimagen de y de f.

Pero nuestra alegría no sería completa si no fuera porque podemos probar que el grado es invariante por homotopías, que ahora pensamos como funciones continuas $h : \overline{\Omega} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ tales que $h(x, s) \neq y$ para todo $x \in \partial\Omega$ y todo $s \in [0, 1]$. El argumento, cortito y al pie, es el mismo que tan bien anduvo para las curvas: si consideramos el conjunto de las funciones admisibles para y,

$$\mathcal{A}_y := \{f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) : y \notin f(\partial\Omega)\},$$

entonces el Lema 2.2 dice que $\deg(f, \Omega, y)$ es continuo como función de f, es decir, localmente constante. Luego es constante sobre las componentes conexas de $\mathcal{A}_y$; en particular, las funciones $h_s := h(\cdot, s) \in \mathcal{A}_y$ pertenecen a una misma componente conexa, ya que la curva $s \mapsto h_s$ es continua. En resumen:

$$\deg(h_s, \Omega, y) \qquad \text{es independiente de } s. \tag{7}$$

Observación 2.3 *Según dijimos, el grado resulta continuo respecto de f, aunque es claro, usando por ejemplo (4), que también es continuo respecto de y. Pero hilando más fino se puede ver que en realidad es continuo respecto de sus tres coordenadas, ya que si el dominio cambia 'poco', entonces el grado no var´a. De alguna forma ya anticipamos esto cuando hablamos de curvas, aunque para que la idea de continuidad tenga sentido, es preciso introducir una topología en el conjunto de todos los posibles $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abiertos y acotados. Una posibilidad* *razonable es la inducida por la métrica de Hausdorff: en tal caso, dos conjuntos Ω_1 y Ω_2 están 'cerca' cuando $d(x_1, \Omega_2)$ y $d(x_2, \Omega_1)$ son chicos para todo $x_1 \in \Omega_1$ y todo $x_2 \in \Omega_2$. Pero, por supuesto, no hace falta meterse con esas cosas: lo que realmente interesa es que el grado se mantiene constante incluso cuando variamos el dominio de manera continua.*

Las propiedades anteriores caracterizan el grado, a tal punto que se puede probar que es único, vale decir, no hay otra función que verifique (3), (4), (5) y (7).

3 Apéndice

A fin de probar el Lema 2.2, veamos en primer lugar que para el caso regular, el grado se expresa fácilmente mediante una integral.

Lema 3.1 *Sea $f \in C^1(\overline{\Omega})$ tal que $y \notin f(\partial\Omega)$ es un valor regular. Para ε suficientemente chico, definimos $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua con soporte contenido en $B_\varepsilon(0)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)\, dx = 1$. Entonces*

$$\deg(f, \Omega, y) = \int_\Omega \Phi(f(x) - y) Jf(x)\, dx. \tag{8}$$

<u>*Proof*</u>: Por el teorema de la función inversa, podemos tomar ε chico y entornos V_x de cada $x \in f^{-1}(y)$ tales que $f|_{V_x} : V_x \to B_\varepsilon(y)$ es un difeomorfismo. Entonces, por el teorema de cambio de variables resulta:

$$\int_\Omega \Phi(f(y) - y) Jf(w)\, dw = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \int_{V_x} \Phi(f(w) - y) Jf(w)\, dw$$

$$= \sum_{x \in f^{-1}(y)} sgn(Jf(x)) \int_{V_x} \Phi(f(w) - y) |Jf(w)|\, dw$$

$$= \sum_{x \in f^{-1}(y)} sgn(Jf(x)) \int_{B_\varepsilon(0)} \Phi(u)\, du = \deg(f, \Omega, y).$$

□

El siguiente paso consiste en mostrar que (8) se puede tomar como una definición del grado para cualquier f suave tal que $y \notin f(\partial\Omega)$. El truco es elegir Φ de manera ingeniosa; más específicamente, pediremos que sea radial y se anule en un entorno de 0, es decir, $\Phi(x) = \phi(|x|)$, con $\phi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua tal que

$$\operatorname{sop}(\phi) \subset (0, \varepsilon), \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \phi(|x|)\, dx = 1.$$

Veamos que si ε es chico, la integral definida en (8) no depende de ϕ:

Lema 3.2 *Sea $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que $y \notin f(\partial\Omega)$, $\varepsilon \leq dist(p, f(\partial\Omega))$ y sean $\phi_j \in C([0,+\infty), \mathbb{R})$ tales que* $\mathrm{sop}(\phi_j) \subset (0,\varepsilon)$ *y además $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_j(|x|)\,dx = 1$ para $j = 1, 2$. Entonces $\int_\Omega \phi_1(|f(x) - y|)Jf(x)\,dx = \int_\Omega \phi_2(|f(x) - y|)Jf(x)\,dx$.*

Demostración: Podemos suponer $y = 0$. Además, por Stone-Weierstrass, podemos suponer f is C^2 y, finalmente, como $\phi(|f(x)|) = 0$ for x en un entorno de $\partial\Omega$, también podemos suponer que $\partial\Omega$ es suave.

Sean $\xi(s) = \phi_1(s) - \phi_2(s)$ y

$$\psi(s) := \frac{1}{s^n} \int_{B_s(0)} \xi(|x|)\,dx.$$

Es claro que ψ es de clase C^1 y $\mathrm{sop}(\psi) \subset (0,\varepsilon)$. Además,

$$s\psi'(s) = -n\psi(s) + s^{1-n} \frac{\partial}{\partial s} \left(\int_{B_s(0)} \xi(|x|)\,dx \right)$$

$$= -n\psi(s) + s^{1-n} \frac{\partial}{\partial s} \left(\omega_n \int_0^s \rho^{n-1} \xi(\rho)\,d\rho \right) = -n\psi(s) + \omega_n \xi(s),$$

donde ω_n es el área de la esfera unitaria $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Por otro lado, definimos

$$V_j(x) := \psi(|f(x)|)\mathrm{det}A_j(x)$$

donde $A_j(x)$ es la matriz que se define a partir de la matriz jacobiana de f en x, reemplazando la columna j por el vector $f(x)$. Como $\psi \equiv 0$ cerca de 0, el campo $V = (V_1, \ldots, V_n)$ es de clase C^1 y se anula en un entorno de $\partial\Omega$.

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} [\psi(|f(x)|)]\mathrm{det}A_j(x) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\psi'(|f(x)|)}{|f(x)|} \sum_{k=1}^n f_k(x) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) \right) \mathrm{det}A_j(x)$$

$$= \frac{\psi'(|f(x)|)}{|f(x)|} \sum_{j,k=1}^n f_k(x) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} f_i(x) m^{ij}(x).$$

donde $m^{ij}(x)$ es el menor ij de la matriz A_j. Pero este menor coincide, vaya casualidad, con el de de la matriz jacobiana de x, de modo que

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) m^{ij}(x) = \begin{cases} Jf(x) & \text{if } k = i \\ 0 & \text{if } k \neq i \end{cases}$$

En consecuencia,

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} [\psi(|f(x)|)]\mathrm{det}A_j = \frac{\psi'(|f(x)|)}{|f(x)|} \sum_{i=1}^n f_i(x)^2 Jf(x) = Jf(x)|f(x)|\psi'(|f(x)|).$$

Llegó la temida hora de derivar el determinante. Para no perder filas y columnas con el camino, resulta conveniente emplear, dada una matriz B, la notación B^{ij} para la matriz que resulta de reemplazar por ceros la fila i y la columna j de B, salvo en el lugar ij, en el que ponemos un 1. De esta forma, el menor ij de B es $(-1)^{i+j}\det(B^{ij})$ y luego

$$\det(B) = \sum_{r=1}^{n} b_{rs} \det(B^{rs})$$

$$\frac{\partial \det}{\partial b_{rs}}(B) = \det(B^{rs}).$$

Esto muestra que

$$\frac{\partial}{\partial x_j}[\det M^{ij}(x)] = \sum_{r,s=1}^{n} \det([M^{ij}]^{rs}) \frac{\partial [M^{ij}]_{rs}}{\partial x_j}.$$

Pero

$$\frac{\partial [M^{ij}]_{rs}}{\partial x_j} = \begin{cases} \frac{\partial^2 f^r}{\partial x_j \partial x_s} & r \neq i, s \neq j \\ 0 & r = i \text{ o } s = j \end{cases}$$

de modo que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}[\det M^{ij}(x)] = \sum_{j=1}^{n} \sum_{r \neq i, s \neq j} \det([M^{ij}]^{rs}) \frac{\partial^2 f^r}{\partial x_j \partial x_s}$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \sum_{r \neq i, j \neq s} det([M^{ij}]^{rs}) \frac{\partial^2 f^r}{\partial x_s \partial x_j}.$$

Finalmente, observemos que si $s \neq j$ entonces $\det([M^{ij}]^{rs}) = -\det([M^{is}]^{rj})$, de donde se obtiene:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}[\det M^{ij}(x)] = -\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_s}[\det M^{is}(x)].$$

En resumen, todo este pequeño lío era para poder decir que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}[\det M^{ij}(x)] = 0$$

y luego

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\sum_{i=1}^{n} f_i(x) \det M^{ij}(x)\right] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \det M^{ij}(x) = nJf(x),$$

lo que nos permite calcular (¡ya era hora!) la divergencia del campo V:

$$\operatorname{div} V(x) = Jf(x) \left[|f(x)|\psi'(|f(x)|) + n\psi(|f(x)|)\right] = \omega_n \xi(|f(x)|) Jf(x).$$

Entonces, por el teorema de Gauss,

$$\int_{\Omega} \xi(|f(x)|)Jf(x)\,dx = \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial\Omega} \mathrm{div}V(x)\,dx = \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial\Omega} V(x)\cdot d\mathbf{S} = 0$$

que era, aunque cueste recordarlo, exactamente lo que queríamos probar. $\square$

El lema previo permite dar entonces una demostración del Lema 2.2:

Demostración del Lema 2.2 : Como antes, podemos suponer $y = 0$. Consideremos una función $\eta : [0, +\infty) \to [0, 1]$ de clase C^1 tal que $\eta \equiv 1$ en $[0, 2\varepsilon]$ y $\eta \equiv 0$ en $[3\varepsilon, +\infty)$. Definimos entonces la función (suave) h, fuertemente sospechada de parecerse a una homotopía:

$$h(x) := (1 - \eta(|f(x)|)f(x) + \eta(|f(x)|)g(x).$$

Observemos que

$$\begin{aligned} &h(x) = f(x) \qquad \text{if } |f(x)| < 2\varepsilon, \\ &h(x) = g(x) \qquad \text{if } |f(x)| > 3\varepsilon, \\ &\|h - f\|_{\infty} < \varepsilon, \quad \|h - g\|_{\infty} < \varepsilon \end{aligned}$$

y adem'as

$$|g(x)| > dist(0, f(\partial\Omega)) - \varepsilon, \qquad |h(x)| > dist(0, f(\partial\Omega)) - \varepsilon$$

para todo $x \in \partial\Omega$. Ahora tomamos $\phi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ con soporte en $(0, \varepsilon)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(|x|)\,dx = 1$ y definimos $\tilde{\phi}(s) = \phi(s - 4)$. Como

$$\mathrm{sop}(\phi), \mathrm{sop}(\tilde{\phi}) \subset (0, 5\varepsilon), \quad 5\varepsilon < dist(0, h(\partial\Omega))$$

se deduce, por el lema anterior:

$$\int_{\Omega} \phi(|h(x)|)Jh(x)\,dx = \int_{\Omega} \tilde{\phi}(|h(x)|)Jh(x)\,dx.$$

Por otro lado, $\phi(z) = 0$ para $|z| \geq \varepsilon$ y $|f(x)| < 2\varepsilon$ para $|h(x)| < \varepsilon$; luego,

$$\phi(|h(x)|)Jh(x) = \phi(|f(x)|)Jf(x)$$

para todo x. Del mismo modo, $\tilde{\phi}(z) = 0$ para $|z| \leq 4\varepsilon$, y si $|h(x)| > 4\varepsilon$ entonces $|f(x)| > 3\varepsilon$. Esto implica que

$$\tilde{\phi}(|h(x)|)Jh(x) = \tilde{\phi}(|g(x)|)Jg(x)$$

para todo x y en consecuencia

$$\int_{\Omega} \phi(|f(x)|)Jf(x)\,dx = \int_{\Omega} \tilde{\phi}(|g(x)|)Jg(x)\,dx.$$

$\square$

Para terminar, una demostración sencilla del lema de Sard:

Demostración del Teorema 2.1 : Como todo valor crítico es imagen de algún punto crítico, alcanza con probar el resultado cuando U es un cubo de lado $L > 0$ y tanto f como sus derivadas están acotadas por cierta constante M. En efecto, el conjunto de todos los puntos críticos se cubre con una familia numerable de cubos compactos y la unión numerable de conjuntos de medida cero tiene medida cero. Dividamos ahora el cubo en N^n cubitos de lado $\frac{L}{N}$; dado un punto crítico x, llamemos C_x al cubito en el cual quedó confinado x. Para $y \in C_x$, escribimos

$$f(y) - f(x) = Df(x)(y - x) + R(y),$$

y por la fórmula del resto sabemos que $|R(y)| \leq \frac{M}{2}|y - x|^2 \leq \frac{nM}{2}\left(\frac{L}{2N}\right)^2$. Además, como x es un punto crítico, $Df(x)$ envía al cubo C_x dentro de una bola de radio $M\sqrt{n}\frac{L}{2N}$ en un subespacio de dimensión menor que n. Esto quiere decir que $f(C_x)$ está contenido en un cilindro cuyo volumen está acotado por $\frac{A}{N^{n+1}}$ para cierta constante A. Luego, si nos quedamos solo con aquellos cubitos que contienen algún punto crítico, el volumen total de sus imágenes es menor o igual que N^n veces $\frac{A}{N^{n+1}}$, es decir, tiende a 0 cuando $N \to \infty$.

$\square$

References

[1]

[2]